Recenzja pracy doktorskiej
mgr Magdaleny Tyniec-Motyki
pt. „Dekompozycje grafów na skojarzenia
oraz zagadnienia pokrewne"

Rozprawa doktorska mgr Magdaleny Tyniec-Motyki zawiera wyniki jej pracy nad dwoma problemami z pogranicza teorii grafów i teorii konfiguracji kombinatorycznych. Pierwszy z tych problemów dotyczy ortogonalnych 1-faktoryzacji grafów wielodzielnych, a drugi maksymalnych kolorowań grafu pełnego. Są to naturalne problemy, które są inspirowane i nawiązują do klasycznych wyników teorii konfiguracji kombinatorycznych.

Formalnie, praca podzielona jest na wstęp i trzy rozdziały. We wstępie autorka rysuje bardzo ogólne tło tematyki, którą zajmuje się w rozprawie oraz anonsuje zawartość poszczególnych rozdziałów. W przystępnie napisanym rozdziale 1 podaje definicje pojęć występujących w rozprawie, a także omawia najważniejsze wyniki związane z tematyką pracy. Rozdziały 2 i 3 poświęcone są dwóm problemom wspomnianym wyżej.

Rozdział 2 zaczyna się od podrozdziału, w którym Autorka omawia powiązania ortogonalnych 1-faktoryzacji grafów z kwadratami łacińskimi i kwadratami Rooma. Te rozważania ilustrowane są przykładami. Główny wynik rozdziału 2 zawarty jest w drugim podrozdziale (Twierdzenie 2.2.10). Jest to pełna charakteryzacja zrównoważonych pełnych grafów wielodzielnych, które posiadają parę ortogonalnych 1-faktoryzacji. Dokładniej, znalezione są wszystkie wartości parametrów p i q, dla których graf $K_{p\times q}$, tj. pełny graf p-dzielny o klasach niezależnych wierzchołków liczności q, ma parę ortogonalnych 1-faktorów. Zaletą tego wyniku jest jego kompletność – całkowite rozwiązanie problemu istnienia takich faktoryzacji w zrównoważonych grafach wielodzielnych. W dowodzie tego wyniku korzysta się z powiązania rozważanych par 1-faktoryzacji takich grafów z tzw. konfiguracjami Howella (będącymi wspólnymi uogólnieniami kwadratów Rooma i ortogonalnych kwadratów łacińskich). Dla większości wartości parametrów p i q istnienie odpowiednich konfiguracji Howella wynika z klasycznego rezultatu Andersona, Schellenberga i Stinsona z 1977 roku lub jest konsekwencją istnienia tzw. ramek Rooma. Ten ostatni wynik też jest klasycznym rezultatem teorii konfiguracji kombinatorycznych. W tych przypadkach do udowodnienia głównego wyniku rozdziału, obok użycia wyżej wspomnianych klasycznych twierdzeń, Autorka wykorzystała pewną konstrukcję rekurencyjną ortogonalnych 1-faktoryzacji dla zrównoważonych grafów wielodzielnych. Najtrudniejszy okazał się przypadek grafu $K_{4\times q}$ kiedy wyżej opisane ogólne konstrukcje nie dają się zastosować ze względu na nie istnienie odpowiednich konfiguracji (kwadratu Rooma czy ramki Rooma). W tym przypadku Autorka wykorzystała jeszcze inną znaną metodę konstrukcji konfiguracji Howella za pomocą tzw. starterów i sumatorów. Główna trudność polegała tu na odpowiednim wyborze starterów i sumatorów.

Ostatnie dwa podrozdziały rozdziału 2 zawierają jeszcze kilka innych drobnych wyników. W podrozdziale 3 Autorka pokazała jak wykorzystać pewne inne konfiguracje kombinatoryczne takie, jak systemy trójek Steinera czy konfiguracje transwersalne do rekurencyjnych konstrukcji ortogonalnych 1-faktoryzacji zrównoważonych grafów wielodzielnych. W ostatnim podrozdziale rozdziału 2 Autorka dokonała przeglądu znanych wyników dotyczących wielowymiarowych kostek Rooma i wielowymiarowych konfiguracji Howella, a także więcej niż dwóch wzajemnie ortogonalnych kwadratów łacińskich. Następnie pokazała jakie rezultaty na temat więcej niż dwóch wzajemnie ortogonalnych 1-faktoryzacji zrównoważonych grafów wielodzielnych wynikają z tych rezultatów.

Podsumowując, do dowodu głównego wyniku rozdziału 2 Autorka wykorzystała klasyczne metody i konstrukcje wykorzystywane w teorii konfiguracji kombinatorycznych. Niemniej jednak wymagało to dogłębnego poznania tych metod i zdobycia niezbędnych intuicji, aby je skutecznie zastosować do rozwiązania otwartego problemu.

Rozdział 3 poświęcony jest badaniu maksymalnych częściowych kolorowań właściwych krawędzi grafu pełnego K_n. Są to takie właściwe kolorowania części krawędzi grafu pełnego $\chi'(K_n)$ kolorami (gdzie $\chi'(K_n)$ to indeks chromatyczny grafu K_n), które nie dadzą się rozszerzyć na żadną niepokolorowaną krawędź. Celem, jaki postawiła sobie Autorka w omawianym rozdziale jest znalezienie wszystkich liczb m, dla których istnieje takie kolorowanie z dokładnie m pokolorowanymi krawędziami. Zbiór takich liczb m nazywa spektrum rozważanego problemu. Problem ten jest podobny do dość szeroko badanego problemu istnienia częściowych kwadratów łacińskich, który można przetłumaczyć na problem częściowych kolorowań właściwych krawędzi grafu pełnego dwudzielnego $K_{n,n}$. W tym kontekście naturalne jest podjęcie badań analogicznego problemu dla grafów pełnych, którego dotyczy główna część rozdziału 3.

W pierwszym podrozdziale rozdziału 3 Autorka dokonała szerokiego przeglądu wyników dotyczących maksymalnych obiektów kombinatorycznych bardziej lub mniej związanych z tematyką rozdziału. W podrozdziale 2 wprowadziła kilka niezbędnych definicji i omówiła związki rozważanych kolorowań z częściowymi kwadratami łacińskimi.

Główne wyniki tego rozdziału znajdują się w następnych dwóch podrozdziałach. W podrozdziale 3, dla szerokiego zakresu wartości parametru

m, Autorka pokazała istnienie maksymalnych częściowych kolorowań właściwych krawędzi grafu pełnego K_n o dokładnie m pokolorowanych krawędziach. Dowód tego twierdzenia wymagał szeregu pomysłowych konstrukcji inspirowanych głównie tzw. kanonicznym kolorowaniem krawędzi grafu pełnego. W kolejnym podrozdziale pokazany jest warunek konieczny, jaki musi spełniać liczba m, aby istniało maksymalne częściowe kolorowanie właściwe krawędzi grafu K_n o m krawędziach. Do dowodu tego nietrywialnego warunku użyto nierówności Jensena. Zestawienie wyników zawartych w omawianych podrozdziałach pozostawia tylko stosunkowo niewielki zakres wartości parametru m, dla którego nie wiadomo, czy istnieje maksymalne częściowe kolorowanie właściwe krawędzi grafu K_n o m krawędziach.

W ostatnim podrozdziale rozdziału 3 Autorka zajmuje się pewnym uogólnieniem problemu rozważanego w poprzednich podrozdziałach. O ile bowiem tam interesowały ją wyłącznie kolorowania, gdzie liczba kolorów jest równa indeksowi chromatycznemu grafu pełnego, to tutaj liczba kolorów jest dowolna. Najpierw pokazuje metodami podobnymi jak w poprzednim podrozdziale analogiczny warunek konieczny dla tego ogólniejszego problemu, a następnie rozważa kolorowania „małą" liczbą kolorów i znajduje odpowiednie spektra dla $k = 1, 2, 3, 4$ kolorów. Ta część pracy polega na drobiazgowym żmudnym rozważeniu wielu możliwych przypadków. Na końcu tego podrozdziału Autorka rozważa problem w pewnym sensie antypodyczny. Znajduje mianowicie największą liczbę kolorów, dla której rozważany przez nią problem jest nietrywialny. Tą liczbą okazuje się być $2n-4$. Dla tej liczby kolorów stara się znaleźć spektrum. Dla grafów pełnych o parzystej liczbie wierzchołków Autorka znajduje niemal całe spektrum. Dla grafów o nieparzystej liczbie wierzchołków wyniki są mniej kompletne. Konstrukcje odpowiednich kolorowań w tej części pracy są dość interesujące. Autorka konstruuje odpowiednie kolorowania używając kolorowań dla mniejszych grafów, potem odpowiednio „rozszczepia" wierzchołki i przekolorowuje krawędzie. Wykorzystuje też wynik Häggkvista i Janssena o kolorowaniu krawędzi grafu pełnego z list. W tej części pracy brakuje mi twierdzenia zbierającego i podsumowującego wszystkie wyniki dotyczące spektrum dla liczby kolorów równiej $2n - 4$. Wyniki są rozproszone po lematach i trudno się zorientować dla jakich wartości parametru m problem został rozstrzygnięty, a dla jakich pozostaje otwarty. Brak tu też dyskusji dotyczącej tej kwestii i sformułowania jakiejś hipotezy sugerującej jak wygląda pełne rozwiązanie problemu spektrum w tym przypadku.

Podsumowując, praca doktorska mgr Magdaleny Tyniec-Motyki zawiera dwa solidne wyniki (Twierdzenia 2.2.10 i 3.3.9), które dotyczą problemów powiązanych z klasycznymi i ważnymi rezultatami z zakresu teorii konfiguracji kombinatorycznych i ekstremalnej teorii grafów. Pierwszy z tych wyników całkowicie rozwiązuje problem charakteryzacji zrównoważonych pełnych grafów wielodzielnych, które posiadają parę ortogonalnych 1-faktoryzacji. Drugi jest nieco mniej kompletny, ale zawiera opis niemal całego zbioru wszystkich liczb m, dla których istnieje maksymalne częściowe kolorowanie właściwe krawędzi grafu pełnego K_n, w którym jest dokładnie m pokolorowanych krawędzi. Problemy rozważane w rozprawie są naturalne dla tego działu matematyki i mogą okazać się interesujące dla badaczy pracujących w tej dziedzinie. Oba główne wyniki rozprawy zostały już opublikowane w czasopismach z listy JCR. Do uzyskania swoich rezultatów Autorka nie użyła jakiś nowatorskich metod, ale pokazała, że bardzo dobrze poznała i opanowała metody konstrukcji rozmaitych obiektów kombinatorycznych stosowane w teorii konfiguracji kombinatorycznych i pokrewnych zagadnieniach grafowych. Konstrukcje te w wielu przypadkach wymagały sporej pomysłowości i biegłości, a czasem żmudnego rozważenia wszystkich przypadków. Niektóre konstrukcje Autorki wykorzystują wyniki innych autorów, co dobrze świadczy o jej znajomości literatury. Widać, że Autorka zdobyła dużą wiedzę w zakresie tematyki związanej z rozprawą doktorską, zapoznała się z bardzo dużą liczbą wyników rozmaitych autorów.

Praca napisana jest starannie. Dowody zredagowane są zrozumiale, z odpowiednią liczbą szczegółów. Znalazłem niewielką tylko liczbę drobnych błędów. Dość kontrowersyjne jest używanie przez Autorkę, w niektórych fragmentach pracy, słowa lemat. Na ogół mianem takim określa się fakt pomocniczy służący do dowodu jakiegoś większego rezultatu. Tymczasem na przykład w ostatnim podrozdziale pracy wszystkie wyniki Autorki występują jako lematy i nie są nigdzie już wykorzystane. Być może należałoby używać określenia w takim kontekście słowa stwierdzenie (które jest stosowane w innych fragmentach pracy).

Konkludując uważam, że praca doktorska mgr Magdaleny Tyniec-Motyki bez zastrzeżeń spełnia wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim i uzasadnia nadanie jej stopnia naukowego doktora nauk matematycznych.

13.12.19

prof. dr hab. Zbigniew Lonc
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska